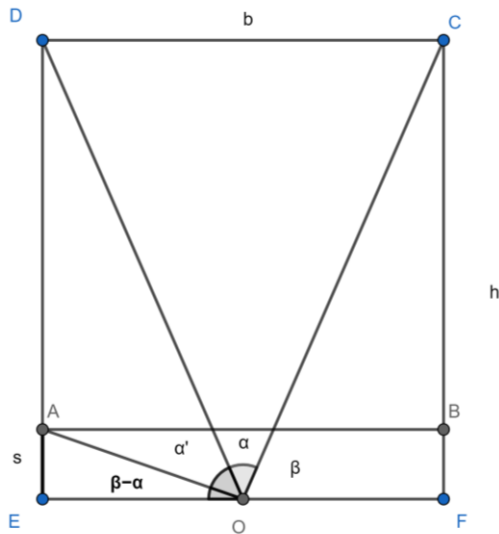


Oltre il giardino

Il problema: dati quattro alberi ai vertici di un quadrato, trovare un punto di osservazione tale da vedere i quattro alberi con lo stesso angolo tra il primo e secondo, tra secondo e terzo e tra terzo e quarto.

Anche questo problema lo ho risolto a quattro mani con **Salvatore. (Stefano Galletta)**

Il fatto che Rudy veda i 4 alberi equispaziati significa che (i) gli angoli di visuale tra gli alberi sono tutti e tre uguali e che (ii) sta, ad una distanza di un metro dal punto medio del lato del giardino, sulla perpendicolare al lato stesso, altrimenti per vedere i quattro alberi equispaziati il segmento che unisce i due alberi posteriori non sarebbe parallelo al lato vicino a Rudy; quindi il disegno è il seguente:



Partiamo da un rettangolo qualsiasi DCEF, di base **b** ed altezza **h**, con O, punto medio di EF, posizione di Rudy e quindi punto di “Osservazione”.

Chiamiamo α l'angolo COD e β l'angolo EOD (e COF).

Tracciamo un segmento AB, parallelo a EF e distante **d** da EF stesso, con **d** tale che l'angolo DOA sia uguale ad α ; di conseguenza l'angolo AOE è uguale a $\beta - \alpha$.

Il giardino di Rudy è il rettangolo ABCD, di base **b** e altezza **(h-s)**, e i quattro alberi stanno in A,B,C e D

Considerando i vari triangoli rettangoli possiamo scrivere:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{b/2}{h} = \frac{b}{2h} \quad \tan \beta = \frac{h}{b/2} = \frac{2h}{b} \quad \tan(\beta - \alpha) = \frac{s}{b/2} = \frac{2s}{b}$$

Applicando le formule di sottrazione e duplicazione della tangente...

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan(\beta) \tan(\alpha)} = \frac{\frac{2h}{b} - \frac{b}{2h}}{1 + \frac{2h}{b} \cdot \frac{b}{2h}} = \frac{2s}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} = \frac{2b}{2h} \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{h}\right)^2}$$

e dopo sostituzioni assortite...

$$\frac{2s}{b} = \frac{\frac{2h}{b} - \frac{b}{h} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}}{1 + \frac{2h}{b} - \frac{b}{h} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}}$$

$$s = \frac{b}{2} \frac{\frac{2h}{b} - \frac{b}{h} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}}{1 + \frac{2h}{b} - \frac{b}{h} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}} = \frac{h - \frac{b^2}{2h} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}}{1 + 2\frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2}} = \frac{h(1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2) - \frac{b^2}{2h}}{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2 + 2} = h \frac{1 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2 - \frac{1}{2}(\frac{b}{h})^2}{3 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2} = h \frac{1 - \frac{3}{4}(\frac{b}{h})^2}{3 - \frac{1}{4}(\frac{b}{h})^2} \quad (1)$$

A questo punto poniamo $s = 1$ e cerchiamo le soluzioni per b ed h (e quindi anche $h-1$) interi

$$h \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right) = 3 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \quad (2)$$

Se il rapporto $\frac{b}{h} = 1$, l'equazione qua sopra si semplifica in $\frac{h}{4} = \frac{11}{4}$ e quindi $h = b = 11$, con il giardino di Rudy che misura **11 mt di base per 10 di altezza**.

Il problema è dimostrare che questa è l'unica soluzione; per fare questo facciamo qualche altra trasformazione della (2)...

$$h \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right) = 3 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{h} \right)^2 ; h \frac{4h^2 - 3b^2}{4h^2} = \frac{12h^2 - b^2}{4h^2} ;$$

$$4h^3 - 3b^2h = 12h^2 - b^2$$

e arriviamo alla seguente forma:

$$b^2 = 4h^2 \frac{h-3}{3h-1} \quad (3)$$

e imponiamo che h sia un intero; perché lo sia anche b , e quindi b^2 sia il quadrato di un intero, deve essere un quadrato (di una frazione) anche $\frac{h-3}{3h-1}$ visto che ovviamente è un quadrato di un intero $4h^2$; cioè:

$$\frac{h-3}{3h-1} = \frac{n^2}{d^2}$$

Con n (numeratore) e d (denominatore) interi positivi ed $n < d$; ora, n può essere qualsiasi, ma d deve essere tale da "semplificarsi" con tutto o parte di $4h^2$ o altrimenti rimarrebbe nella (3) una parte al denominatore e b non sarebbe un intero.

Il caso banale di $b = h$ corrisponde a $d = 2$ (ed $n = 1$) per cui $d^2 = 4$ si semplifica con il 4 di $4h^2$ e da $\frac{h-3}{3h-1} = \frac{1}{4}$ si ricava velocemente (come già visto) $h = 11$.

Qualsiasi altra soluzione dovrebbe semplificare d^2 con una parte di h^2 ; cioè d dovrebbe essere uno dei fattori di h : $h = d \cdot e$;

Allora $\frac{h-3}{3h-1} = \frac{n^2}{d^2}$ potrebbe essere scritta $\frac{ed-3}{3ed-1} = \frac{n^2}{d^2}$; ma $3ed-1$ non può essere multiplo di d (e non lo diventa quello che ne rimane dopo la eventuale riduzione ai minimi termini con il numeratore) e in particolare non può valere d^2 (o un suo multiplo) quindi l'uguaglianza non è possibile con d ed e interi, il denominatore non viene mai semplificato ad 1, p^2 è il quadrato di una frazione e non di un intero e dunque non ci sono altre soluzioni.

Con ogni probabilità ci sono modi meno tortuosi per arrivare al risultato, ma questo è l'unico che abbiamo partorito.

2 caso (giardino quadrato)

In questo caso, $b = h - 1$ e la (2) diventa:

$$h \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{h-1}{h} \right)^2 \right) = 3 - \frac{1}{4} \left(\frac{h-1}{h} \right)^2$$

Sviluppando arriviamo alla seguente equazione di terzo grado:

$$h^3 - 5h^2 - 5h + 1 = 0$$

le tre soluzioni sono:

$h = -1$ (che scartiamo perché h deve essere positivo)

$h = \sqrt{3} - 2$ (che scartiamo perché $b = h-1$ sarebbe negativo)

$h = \sqrt{3} + 2 = 5,828$

e quindi il giardin(ett)o di Rudy in questo caso è un quadrato di lato di mt 4,828. Per inciso, in questo caso α è uguale a 45° .

N.B. esiste una altra soluzione, geometricamente ineccepibile, e che risolve sia il primo quesito che il secondo, ma che richiede una verifica sulla fisiologia del proprietario del giardino: Rudy è una capra? O un qualsiasi altro animale (camaleonte, ragno zebra, ...) con un'ampiezza visiva superiore a 270° ?

Se è così, Rudy può stare al centro del suo giardinetto di ben 2 mt x 2 e anche così vedere i suoi alberi equispaziati, secondo angoli di 90° .

In altre parole, il testo del problema non vieta che Rudy sia a un metro dal lato più vicino (che poi, sarebbero tutti vicini nella stessa misura), ma stando **dentro** al giardino.

Questa soluzione si trova ponendo nella (1) $s = -1$; la (3) diventerebbe:

$$b^2 = 4h^2 \frac{h-3}{1-3h}$$

e l'unico valore intero di h a cui corrisponde un b intero è $h = 1$ (se $h > 3$ il rapporto diventa negativo e b diventa un numero immaginario) e quindi $b = 2$, con un claustrofobico giardino di $b = 2\text{mt}$ e $h = 1 - (-1) = 2\text{ mt}$