La Mosca e i due treni

Il problema

Due treni sono a 60 chilometri uno dall'altro e stanno andando uno incontro all'altro, alla velocità di 30 chilometri all'ora. Una mosca in grado di viaggiare indefinitamente a 60 chilometri all'ora parte da un treno e vola verso l'altro treno; quando lo raggiunge, gira in tempo zero e vola verso il primo treno, e avanti così sin quando i due treni si incrociano: in quel momento, la mosca si ferma. Quanta strada percorre la mosca?

Di solito, quando qualcuno trova la soluzione, gli si racconta che, quando il problema fu posto a von Neumann questi dette immediatamente la risposta. Deluso, il propositore disse: "Oh, conoscevi già il trucco!" al che, von Neumann rispose: "Quale trucco? Ho sommato la serie". E tutti giù a ridere. Bene, per farvi smettere di ridere, la domanda è: ma voi l'avete mai risolto "alla von Neumann"?

La soluzione ovviamente è che i treni si incrociano dopo un'ora (la distanza iniziale è 60 km e la velocità dei treni è di 30 km/h ciascuno; in un'ora la mosca ha fatto 60 km
Qui però chiedono quale è la serie …

Soluzione con la serie

Caso velocità mosca = 2 volte velocità treni

Sia D distanza iniziale tra i due treni. La velocità mosca è doppia della velocità dei treni. Il primo incontro avviene a 2/3 della distanza D. Il treno percorre 1/2 della distanza percorsa dalla mosca.
1/3+2/3=1

Per il secondo tratto vale il ragionamento del primo. Ma la distanza ora è 1/3
Infatti, quando la mosca inverte la direzione il primo treno si troverà a 1/3 della distanza iniziale.
E la mosca a 2/3. (2/3-1/3=1/3)
Quindi al secondo incontro la mosca ha percorso 2/3+ 2/3 * 1/3 della distanza D
Al terzo incontro avremo 2/3 (1+1/3+(1/3)^2+ (1/3)^3). Lo stesso per i successivi incontri.

Abbiamo quindi la serie

$$d = D\,2/3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Ricordiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ ;\quad 0 \le x < 1$$

Applichiamo la formula e otteniamo d=D

$$d = D\,\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = D\,\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = D\,\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = D$$

Caso velocità mosca = 4 volte velocità treni

Il primo incontro avviene a 4/5 della distanza D.
Il treno percorre 1/5 della distanza totale. 1/5+4/5=1
Per il secondo tratto vale il ragionamento del primo. Ma la distanza ora è 3/5
Infatti, quando la mosca inverte la direzione il primo treno si troverà a 1/5 della distanza iniziale. E la mosca a 4/5 ; (4/5-1/5=3/5)
Quindi al secondo incontro la mosca ha percorso 4/5+ 4/3 * 3/5 della distanza D
Al terzo incontro avremo 4/5 (1+3/5+(3/5)^2+ (3/5)^3). Lo stesso per i successivi incontri.

$$d = D\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} = D\ \frac{4}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}}\right) = D\ \frac{4}{5}\frac{5}{2} = D\ 2$$

Caso generale velocità mosca = a volte velocità treni

Il primo incontro avviene a a/(a+1) della distanza D.
Il treno percorre 1/a della distanza percorsa dalla mosca.
Per il secondo tratto vale il ragionamento del primo. Ma la distanza ora è (a-1)/(a+1)
Infatti, quando la mosca inverte la direzione il primo treno si troverà a 1/(a+1) della distanza iniziale. E la mosca a a/(a+1); (a/(a+1) -1/(a+1) =(a-1)/(a+1)
Quindi al secondo incontro la mosca ha percorso a/(a+1) (1+ (a-1) /(a+1)
Iteriamo come nei casi precedenti

$$d = D\frac{a}{a+1}\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{a}-1}{\mathrm{a}+1}\right)^{\mathrm{n}} = \mathrm{D}\ \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+1}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{a}-1}{\mathrm{a}+1}}\right) = \mathrm{D}\ \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+1}\frac{\mathrm{a}+1}{2} = \mathrm{D}\ \frac{\mathrm{a}}{2}$$

Applicazione nel caso a = 3

$$d = D\frac{3}{3+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-1}{3+1}\right)^{n} = D\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{4}}\right) = D\ \frac{3}{4}\frac{4}{2} = D\ \frac{3}{2}$$

CASO GENERALE Velocità dei treni diversa

Definiamo a_1 il rapporto tra la velocità della mosca e quella del treno T_1
(da cui si muove la mosca all'inizio)
Definiamo a_2 il rapporto tra la velocità della mosca e quella del treno T_2
(verso cui si muove nel primo tratto)
Poniamo D1 la distanza tra i due treni all'inizio del processo

Tratto 1; La mosca si muove verso il treno 2. L'incontro avviene a distanza

$$d_1 = D_1 \frac{a_2}{a_2 + 1}$$

Infatti, la la velocità relativa tra i due treni in modulo è pari alla somma delle velocità dei due treni. Il primo incontro avviene al tempo t pari a D1/(Vm+Vt2). Il primo percorso d1=Vm * D1/(Vm+Vt2) = D1 * 1/(1+1/a2).

Tratto 2; La mosca si muove verso il treno1. Quando inizia il percorso verso T1, il treno T1 ha già percorso una distanza, parte del percorso. La distanza che indichiamo con D2 tra la mosca e il treno T1 è pari a:

$$D_2 = d_1 - D_1 \frac{a_2}{a_1(a_2 + 1)} = D_1 \left(\frac{a_2}{a_2 + 1} - \frac{a_2}{a_1(1 + a_2)} \right) = D_1 \frac{a_2(a_1 - 1)}{a_1(a_2 + 1)}$$

Infatti, t= D1 /(Vm+Vt2) del primo incontro, T1 ha percorso Vt1* D1 /(Vm+Vt2) = D1 /(a1+a1/a2) = D1 a2/(a1(1+a2))

Per calcolare il secondo percorso usiamo la stessa formula di prima. La distanza è ora D2 e dobbiamo usare a1 perché stiamo andando verso T1.

$$d_2 = D_2 \frac{a_1}{a_1 + 1} = D_1 \frac{a_2(a_1 - 1)}{a_1(a_2 + 1)} \frac{a_1}{(a_1 + 1)} = D_1 \frac{a_2}{(a_2 + 1)} \frac{(a_1 - 1)}{(a_1 + 1)}$$

Tratto 3; Applichiamo lo stesso procedimento del tratto 1. La distanza D3 si calcola come per il tratto 2 per tenere conto che il T2 si è avvicinato. Ovviamente bisogna invertire a1 con a2

$$D_3 = D_2 \frac{a_1(a_2 - 1)}{a_2(a_1 + 1)} = D_1 \frac{(a_1 - 1)\,(a_2 - 1)}{(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)}$$

Per calcolare il terzo percorso usiamo la stessa formula di prima. La distanza è D3 e dobbiamo usare a2 perché stiamo andando verso T2.

$$d_3 = D_3 \frac{a_2}{a_2 + 1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2 + 1)} \frac{(a_1 - 1)\,(a_2 - 1)}{(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)}$$

Tratto 4; La mosca si muove verso il treno1. Usiamo lo stesso procedimento (caso 2)

$$D_4 = D_3 \frac{a_2(a_1 - 1)}{a_1(a_2 + 1)} = D_1 \frac{(a_1 - 1)\,(a_2 - 1)}{(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)} \frac{a_2(a_1 - 1)}{a_1(a_2 + 1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{(a_1 - 1)^2\,(a_2 - 1)}{(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)^2}$$

$$d_4 = D_4 \frac{a_1}{a_1 + 1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2 + 1)} \frac{(a_1 - 1)^2\,(a_2 - 1)}{(a_1 + 1)^2\,(a_2 + 1)}$$

Tratto 5; La mosca si muove verso il treno 2. Usiamo lo stesso procedimento (caso 3)

$$D_5 = D_4 \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{(a_1-1)^2\ (a_2-1)}{(a_1+1)\ \ (a_2+1)^2} \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{(a_1-1)^2\ (a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\ \ (a_2+1)^2}$$

$$d_5 = D_5 \frac{a_2}{a_2+1} = D_1 \frac{a_2}{1+a_2} \frac{(a_1-1)^2\ (a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\ \ (a_2+1)^2}$$

Tratto 6; La mosca si muove verso il treno 1. Usiamo lo stesso procedimento (caso 2)

$$D_6 = D_5 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3\ (a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\ \ (a_2+1)^2}$$

$$d_6 = D_6 \frac{a_1}{a_1+1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3\ (a_2-1)^2}{(a_1+1)^3\ \ (a_2+1)^2}$$

I vari casi sono necessari per trovare una formula recursiva. Completiamo con i tratti 7 e 8

Tratto 7; La mosca si muove verso il treno 2. Usiamo lo stesso procedimento (caso 3)

$$D_7 = D_6 \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(a_1+1)} = D_1 \frac{(a_1-1)^3\ (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3\ \ (a_2+1)^3}$$

$$d_7 = D_7 \frac{a_2}{a_2+1} = D_1 \frac{a_2}{1+a_2} \frac{(a_1-1)^3\ (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3\ \ (a_2+1)^3}$$

Tratto 8; La mosca si muove verso il treno 1. Usiamo lo stesso procedimento (caso 2)

$$D_8 = D_7 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^4\ (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3\ \ (a_2+1)^3}$$

$$d_8 = D_8 \frac{a_1}{a_1+1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^4\ (a_2-1)^3}{(a_1+1)^4\ \ (a_2+1)^3}$$

I casi dispari (pari) hanno in comune la direzione del moto e la possibilità di trovare una iterazione

Riepiloghiamo i tratti dispari e quelli pari

Elenco percorsi d dispari

$$d_1 = D_1 \frac{a_2}{1+a_2}$$

$$d_3 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

Possiamo scrivere

$$d_3 = d_1 \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

$$d_5 = D_1 \frac{a_2}{a_2+1} \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\,\,(a_2+1)^2}$$

Possiamo scrivere

$$d_5 = d_1 \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^2$$

$$d_7 = D_1 \frac{a_2}{a_2+1} \frac{(a_1-1)^3\,(a_2-1)^3}{(a_1+1)^3\,\,(a_2+1)^3}$$

Possiamo scrivere

$$d_7 = d_1 \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^3$$

Percorso dei termini dispari

$$d_d = d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + \cdots = d_1 \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

n=0 corrisponde a d1, n=1 corrisponde d3, n=2 a d5, ……

Elenco percorsi d pari

$$d_2 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)}{(a_1+1)}$$

$$d_4 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^2 (a_2-1)}{(a_1+1)^2 (a_2+1)}$$

Possiamo scrivere

$$d_4 = d_2 \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}$$

$$d_6 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3 (a_2-1)^2}{(a_1+1)^3 (a_2+1)^2}$$

Possiamo scrivere

$$d_6 = d_4 \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}$$

$$d_6 = d_2 \left[\frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}\right]^2$$

$$d_8 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^4 (a_2-1)^3}{(a_1+1)^4 (a_2+1)^3}$$

Ovvero

$$d_8 = d_6 \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}$$

$$d_8 = d_2 \left[\frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}\right]^3$$

Percorso dei termini pari

$$d_p = d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots = d_2 \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)(a_2+1)}\right]^n$$

n=0 corrisponde a d2, n=1 corrisponde d4, n=2 d6, ……

Somma dei percorsi pari e dispari

$$d_d = d_1 + d_3 + d_5 + d_6 + \cdots = d_1 \sum_0^{\infty} \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

$$d_p = d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots = d_2 \sum_0^{\infty} \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

La sommatoria è uguale per le due serie. Il percorso totale risulta:

$$d_T = \sum_0^{\infty} \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n \,(d_1 + d_2)$$

La sommatoria è la serie geometrica con il termine x <1. Quindi

$$d_T = \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}}\,(d_1 + d_2)$$

$$d_T = \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}}\, D_1 \frac{a_2}{a_2+1}\left(1 + \frac{(a_1-1)}{(a_1+1)}\right)$$

$$d_T = D_1 \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}}\, \frac{a_2}{a_2+1}\left(\frac{(a_1+1)+(a_1-1)}{(a_1+1)}\right)$$

$$d_T = D_1 \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}}\, \frac{2\,a_1 a_2}{(a_2+1)(a_1+1)}$$

Nel caso a=a1=a2, ovvero i due treni con la stessa velocita in modulo, otteniamo:

$$d_T = D_1 \frac{1}{1 - \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}}\, \frac{2a^2}{(a+1)^2} = D_1 \frac{2a^2}{(a+1)^2 - (a-1)^2} = D_1 \frac{2a^2}{4a} = D_1 \frac{a}{2}$$
